Ⓐ

LØSNINGER:

OPPG. 1: Vi får 3 ligninger med 3 ukjente:

$$a + b + c = -4$$
$$a - b + c = 0$$
$$4a + 2b + c = 3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} -1 \quad -4 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & 19 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 15 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\underline{a = 3, \quad b = -2, \quad c = -5}$$
$$\underline{y = 3x^2 - 2x - 5}$$

OPPG. 2:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -10 \\ 7 & 2 & 7 \\ 2 & -5 & \alpha \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{1}{3} \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{10}{3} \\ 7 & 2 & 7 \\ 2 & -5 & \alpha \end{array}\right] \begin{array}{c} -7 \quad -2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{91}{3} \\ 0 & -\frac{13}{3} & \alpha + \frac{20}{3} \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{91}{3} \\ 0 & 0 & \alpha + \frac{111}{3} \end{array}\right]$$

Må velge $\alpha = -\frac{111}{3} = \underline{-37}$

Da blir ligningsystemet:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = -1$
$x_2 = 7$
når $\underline{\alpha = -37}$

OPPG. 3:

(a) Vi har at $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 = 0$ og $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2 = 0$

Dette gir $\mathbf{v} \cdot (k_1 \mathbf{w}_1 + k_2 \mathbf{w}_2) = k_1(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1) + k(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2)$

$= k_1 0 + k_2 0 = 0$. Altså er $\mathbf{v} \perp (k_1 \mathbf{w}_1 + k \mathbf{w}_2)$ for hvert valg av k_1 og k_2.

(b) Ønsker å bestemme k_1 og k_2 s.a.

$$(k_1 \mathbf{w}_1 + k_2 \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{v} = 0$$

eller $(k_1 + 2k_2,\ k_1,\ -2k_1 - k_2) \perp (-1, 1, 5)$

som gir: $-(\cancel{k_1} + 2k_2) + \cancel{k_1} - 5(2k_1 + k_2) = 0$

eller: $-2k_2 - 10k_1 - 5k_2 = 0 \qquad -10k_1 = 7k_2$

Kan velge: $\underline{k_1 = 7, \quad k_2 = -10}$

(c) Vi har moteksempel i (b):

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ er vinkelrett på } 7\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - 10\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

men $\mathbf{v}$ er ikke vinkelrett på

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

OPPG. 4:

(a) $-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

Må ha $r^4 = 4$, d.v.s $r = \sqrt{2}$

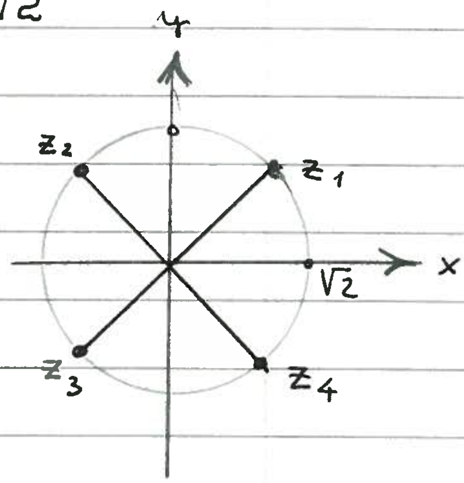
Videre har vi:

$4\theta_1 = \pi$; $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$

$4\theta_2 = \pi + 2\pi$; $\theta_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

$4\theta_3 = \pi + 4\pi$; $\theta_3 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

$4\theta_4 = \pi + 6\pi$; $\theta_4 = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}$



Altså har vi:

$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 1 + i$

$z_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -1 + i$

$z_3 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -1 - i = \bar{z}_2$

$z_4 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 1 - i = \bar{z}_1$

(b) $(-1)^5 + (-1)^4 + 4(-1) + 4 = -1 + 1 - 4 + 4 = 0$

Altså er $x = -1$ en rot i ligningen

$$x^5 + x^4 + 4x + 4 = 0.$$

Dette gir at $(x+1)$ går opp i

$$p(x) = x^5 + x^4 + 4x + 4$$
$$= x(x^4 + 4) + (x^4 + 4) = (x+1)(x^4+4)$$

ⓒ

Fullstendig faktorisering av polynomet $p(z)$ er dermed:

$$z^5+z^4+4z+4 \equiv (z+1)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$$
$$\equiv (z+1)[(z-z_1)(z-\bar{z}_1)][(z-z_2)(z-\bar{z}_2)]$$
$$\equiv (z+1)[z^2-(2\operatorname{Re} z_1)z+|z_1|^2][z^2-2(\operatorname{Re} z_2)z+|z_2|^2]$$
$$\equiv (z+1)(z^2-2z+2)(z^2+2z+4)$$

Altså har vi:

$$\underline{p(x) \equiv (x+1)(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)}$$

som er den ønskede faktorisering i 1. og 2. grads polynom med reelle koeffisienter.

OPPG. 5:

(a) Vi velger her $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ lik $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Vi får da:

$$[x\ y]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [y\ x]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = yx+yx = 2xy.$$

(b) $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-1 = 0$ gir $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$

$\lambda_1 = 1$: $\begin{matrix} -1x_1 + 1x_2 = 0 \\ 1x_1 - 1x_2 = 0 \end{matrix}$ gir $x_1 = x_2$; $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -1$: $\begin{matrix} 1x_1 + 1x_2 = 0 \\ -x_1 + 1x_2 = 0 \end{matrix}$ gir $x_1 = -x_2$; $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(c) $P \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ Merker oss at $\det P = 1$

Har fra teorien (eller ved regning) at P er en ortogonal matrise:

$$P^{-1} = P^T$$

I følge teorien vil da $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Kan kontrolleres ved utregning:

D

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac12+\frac12\right) & 0 \\ 0 & \left(-\frac12-\frac12\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = D$$

(d) Vi har da først og fremst at ved variabelskifte $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ der $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ("gamle" koordinater) og $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ("nye" koordianter):

$$q(x,y) = 2xy = x'^2 - y'^2$$

Videre har vi:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

som gir: ($\theta = \frac{\pi}{4}$ dreining!)

$$x = \tfrac{1}{\sqrt2}x' - \tfrac{1}{\sqrt2}y'.$$

Dette gir da:

$$1 = 2xy + 2\sqrt2\, x = x'^2 - y'^2 + 2\sqrt2\left(\tfrac{1}{\sqrt2}x' - \tfrac{1}{\sqrt2}y'\right)$$

$$= x'^2 - y'^2 + 2x' - 2y'$$

Vi kompleterer kvadratene:

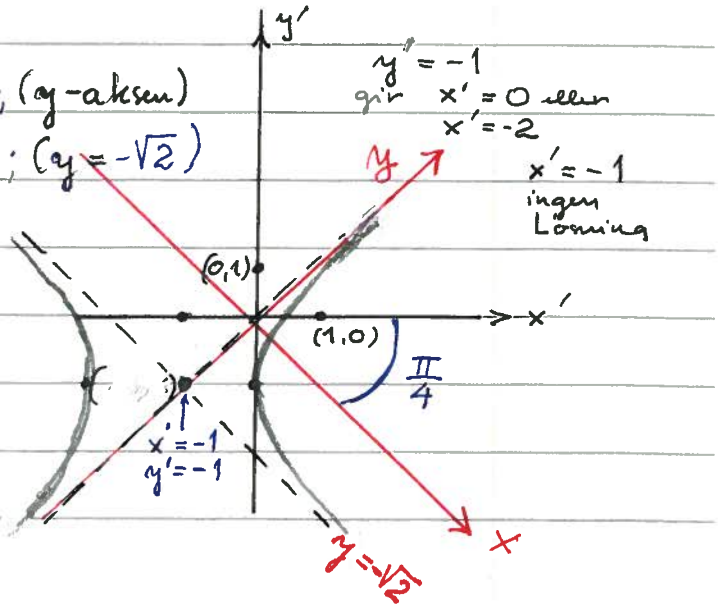
$$(x'^2 + 2x' + 1) - (y'^2 + 2y' + 1) = 1$$

$$(x'+1)^2 - (y'+1)^2 = 1$$

I $x'y'$-koordinatsystemet blir dette en hyperbel med sentrum i $(-1,-1)$, asymptoter:

$$x'+1 = y'+1 \;;\; (y\text{-aksen})$$

$$x'+1 = -(y'+1) \;;\; (y = -\sqrt2)$$



Setter inn $x'=1,\ y'=0$

og får $x = \frac{1}{\sqrt2},\ y = \frac{1}{\sqrt2}$

Setter inn $x'=0,\ y'=1$

og får $x = -\frac{1}{\sqrt2},\ y = \frac{1}{\sqrt2}$

Dreining $\theta = \frac{\pi}{4}$

Ⓔ

OPPG. 6.

$$\det A^T = \det A$$

i følge teorien. Ser vi på den transponerte matrise har vi:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \\ a_{1m} & \cdots & & a_{mm} \end{bmatrix}$$ og vi kan skrive:

$$A^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} a_{im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Altså har ligningssystemet

$$A^T x = 0$$

en ikke triviell løsning: $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

Derfor må

$$\det A^T = 0$$

i følge teorien. Altså må også:

$$\det A = 0.$$

ALTERNATIV LØSN:

Determinanter endrer ikke verdi om man adderer en lineærkombinasjon av de øvrige radene til en bestemt rad:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & & & \\ \sum_{j=1}^{m} a_{j1} & \sum_{j=1}^{m} a_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{m} a_{jm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & & & \\ a_{m-1,1} & \cdots & & a_{m-1,m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ved utvikling etter siste rad.